5. INSIEMI LIMITATI E ILLIMITATI; MASSIMO, MINIMO, ESTREMO SUPERIORE, ESTREMO INFERIORE

L'intervallo $(-1, 7)$ è limitato sia inferiormente che superiormente.

Invece l'intervallo $(4, +\infty)$ è limitato inferiormente ma non superiormente.

L'insieme degli x tali che $|x| \geq 5$ è **IL**limitato sia inferiormente che superiormente.

L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ è illimitato superiormente, mentre è limitato inferiormente.

L'insieme degli interi relativi $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ è illimitato sia inferiormente che superiormente.

DEFINIZIONI

- Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice "**SUPERIORMENTE LIMITATO**" se ammette un "**limitante superiore**", ossia se esiste un numero $k \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in E,\ x \leq k$
- Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice "**INFERIORMENTE LIMITATO**" se ammette un "**limitante inferiore**", ossia se esiste un numero $k \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in E,\ x \geq k$
- Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice "**LIMITATO**" se è limitato sia inferiormente che superiormente.

E' ovvio che
se un insieme E ammette un limitante superiore k, allora ne ammette infiniti (tutti i numeri $\geq k$);
se un insieme E ammette un limitante inferiore k, allora ne ammette infiniti (tutti i numeri $\leq k$).

Sinonimo di "limitante superiore (inferiore)" è "maggiorante (minorante)"

Un insieme E è superiormente (inferiormente) illimitato quando, comunque grande si fissi il numero positivo M, esiste sempre un elemento di E maggiore di M (minore di $-M$)

- Il **TEOREMA DI BOLZANO**

  Si dimostra che **un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ che sia limitato e contenga infiniti punti, deve per forza ammettere almeno un punto di accumulazione (appartenente o no all'insieme).**
  Questa proposizione è attribuita a Bernard Bolzano (Praga 1781-1848)

  - Se un insieme numerico E è illimitato superiormente (inferiormente), allora si conviene che $+\infty$ ($-\infty$) sia punto di accumulazione per E.
    Con questa convenzione, potremmo riformulare il precedente Teorema di Bolzano scrivendo che "qualunque insieme numerico E avente infiniti elementi ammette almeno un punto di accumulazione, che può trovarsi al finito o all'infinito, e appartenere o no all'insieme"
  - Alcuni testi chiamano "teorema di Bolzano" un altro enunciato, quello che noi denomineremo "teorema di Darboux" o "dei valori intermedi".
    Questi matematici! Si mettessero un po' più d'accordo!

- **Massimo e minimo di un insieme**

  Consideriamo un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$.

  - Se esiste un elemento $\bar{x} \in E$, tale che, $\forall x \in E$, risulti $x \leq \bar{x}$, allora si dice che $\bar{x}$ è il **MASSIMO** di E.
  - Se esiste un elemento $\bar{\bar{x}} \in E$, tale che, $\forall x \in E$, risulti $x \geq \bar{\bar{x}}$, allora si dice che $\bar{\bar{x}}$ è il **MINIMO** di E.

I due simboli
$\bar{x},\ \bar{\bar{x}}$
si leggono rispettivamente:
"x segnato"
e "x segnato due volte".

Un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, che sia finito (cioè: costituito da un numero finito di elementi), ammette sempre sia un minimo che un massimo; ma se E è infinito, ciò può anche non avvenire.
Esempi:

- ✓ L'insieme $\mathbf{F} = \left\{\frac{1}{k},\ con\ k = 1, 2, 3, 4, ...\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$
  è dotato di MASSIMO (il numero 1), ma, sebbene sia inferiormente limitato, non è dotato di minimo!
- ✓ L'intervallo semiaperto $[a, b)$ ha come minimo il numero a, ma non ammette massimo.
- ✓ L'insieme $\mathbb{N}$ ha come minimo 0 e (non essendo superiormente limitato) non ammette massimo.

- **Estremo superiore, estremo inferiore di un insieme**

  In matematica, un concetto PIU' GENERALE del concetto di massimo (o, rispettivamente, di minimo) è il concetto di "estremo superiore" (rispettivamente, "estremo inferiore").
  Introduciamolo con alcuni esempi, poi ne daremo la definizione.

  a) Abbiamo appena osservato che l'insieme $\mathrm{F} = \left\{ \frac{1}{k},\ con\ k = 1, 2, 3, 4, ... \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ... \right\}$
  è dotato di massimo ($M = 1$), ma non di minimo (infatti, preso un qualsivoglia elemento di F, esistono sempre in F elementi ancora più piccoli di quello considerato).
  Tuttavia il numero 0 (che NON appartiene ad F)
  occupa, nei confronti degli elementi di F, una posizione molto particolare.
  Tutti gli elementi di F sono maggiori di 0, ma si avvicinano sempre più a 0, al crescere di *k*, affollandosi in prossimità dello 0 fino a "sfiorarlo", seppure non riescano a raggiungerlo.
  Lo 0 è un limitante inferiore dell'insieme F;
  ma fra i limitanti inferiori di F, è quello "più prossimo" agli elementi di F, perché ogni intorno destro di 0, anche se viene preso piccolo piccolo piccolo, contiene sempre dei punti di F.
  Diremo che il numero 0, sebbene non sia il minimo di F (perché non appartiene a F), è l' "estremo inferiore" dell'insieme F.

  b) L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
  ha come estremo inferiore 0 (che ne è anche il minimo), mentre il suo estremo superiore è $+\infty$

  c) L'intervallo chiuso $[a, b]$ ammette *a* come minimo, *b* come massimo
  (possiamo dire che *a* ne è l'estremo inferiore, che, appartenendo all'insieme, ne fa anche da minimo, mentre *b* ne è l'estremo superiore, che, appartenendo all'insieme, ne fa anche da massimo).

  d) L'intervallo aperto (a, b) non ha né massimo né minimo:
  ammette invece il punto *a* come estremo inferiore, il punto *b* come estremo superiore.

  e) L'insieme G dei numeri IRrazionali appartenenti all'intervallo $[0, 1]$ è privo sia di minimo che di massimo; ammette però 0 come estremo inferiore, 1 come estremo superiore.

  f) L'insieme $\mathrm{H} = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$ è illimitato sia inferiormente che superiormente, quindi non ha né minimo né massimo, ma ha come estremo inferiore $-\infty$ e come estremo superiore $+\infty$.

- DEFINIZIONE

  Sia $\mathbf{E} \subseteq \mathbb{R}$, superiormente limitato.
  Si dice "**ESTREMO SUPERIORE**" di E quel numero *L*, se esiste, tale che:
  I. *L* sia un limitante superiore per E, ossia $\forall x \in \mathrm{E},\ x \le L$;
  II. comunque piccolo si fissi un $\varepsilon > 0$, esiste sempre almeno un elemento *x* di E tale che $L - \varepsilon < x \le L$

  Nel caso poi che E sia superiormente illimitato, si dice che "l'estremo superiore di E è $+\infty$ "

Un TEOREMA estremamente interessante, la cui dimostrazione omettiamo perché dipende da considerazioni piuttosto fini sulla definizione di numero reale, afferma che:

- (IMPORTANTE): **OGNI insieme numerico $\mathbf{E} \subseteq \mathbb{R}$ ammette estremo superiore (finito o infinito).**

TEOREMI

- **L'estremo sup. di un insieme numerico E, nel caso sia finito, è il minimo fra i limitanti superiori di E**
  (quindi l'insieme dei limitanti sup. di un insieme E, se non è vuoto, possiede sempre l'elemento minimo)
- **Un insieme numerico E ammette massimo se e solo se l'estremo sup. di E è finito e appartiene ad E. In tal caso, il massimo e l'estremo superiore coincidono.**

Del tutto analoga è la definizione di estremo inferiore di un insieme numerico E.

- Sia $\mathbf{E} \subseteq \mathbb{R}$, inferiormente limitato.

  Si dice "**ESTREMO INFERIORE**" di E quel numero ℓ, se esiste, tale che:
  I. ℓ sia un limitante inferiore per E, ossia $\forall x \in \mathrm{E},\ x \ge \ell$;
  II. comunque piccolo si fissi un $\varepsilon > 0$, esiste sempre almeno un elemento *x* di E tale che $\ell \le x < \ell + \varepsilon$

Nel caso poi che E sia inferiormente illimitato, si dice che "l'estremo inferiore di E è $-\infty$ "

TEOREMI

- (IMPORTANTE): ***OGNI*** **insieme numerico $\mathbf{E} \subseteq \mathbb{R}$ ammette estremo inferiore (finito o infinito).**
- **L'estremo inf. di un insieme numerico E, nel caso sia finito, è il massimo fra i limitanti inferiori di E**
  (quindi l'insieme dei limitanti inf. di un insieme E, se non è vuoto, possiede sempre l'elemento massimo).
- **Un insieme numerico E ammette minimo se e solo se l'estremo inf. di E è finito e appartiene ad E. In tal caso, il minimo e l'estremo inferiore coincidono.**

L’estremo inferiore di un insieme E viene indicato col simbolo **inf (E)**, l’estremo superiore con **sup (E).**